Sobre el Uso de Números Duales en Cinemática de Cuerpos Rígidos

J. Bernal y R. Campa
División de Estudios de Posgrado e Investigación
Instituto Tecnológico de la Laguna
Torreón, Coah., 27000, México
recampa@ieee.org

***Resumen*— Los números duales constituyen una extensión a los números reales, tal como lo son los números complejos. Las interesantes propiedades de estos números han demostrado ser útiles para el modelado de sistemas mecánicos. En este trabajo se explica cómo usar vectores de números duales para calcular el modelo cinemático de un cuerpo rígido que se mueve libremente en el espacio. También se hace una comparación con otras parametrizaciones de la postura (posición y orientación), aunque son los números duales los que dan las expresiones más compactas, ya que permiten combinar en un solo término las expresiones de la posición y la orinetación.**

Palabras clave: Números duales, cuaterniones, cinemática, cuerpo rígido.

I. INTRODUCCIÓN

El descubrimiento de los cuaterniones por W. R. Hamilton, en 1843 (Hamilton, 1843) permitió la generalización de los números complejos. La importancia de los cuaterniones unitarios (cuaterniones con norma igual a uno), radica en que éstos permiten caracterizar el espacio de configuración de la orientación de un cuerpo en el espacio, de la misma forma que los números complejos unitarios lo hacen para la orientación en el plano.

Inspirados en el trabajo de Hamilton, otros matemáticos de mediados del siglo XIX desarrollaron otros sistemas algebraicos de números hipercomplejos, pero fue W. K. Clifford quien desarrolló una teoría general que permitió dar una estructura común a todas estas álgebras, ahora conocidas como álgebras de Clifford.

Los llamados números duales forman una extensión a los números reales similar a la de los números complejos; y así como los números complejos unitarios describen una rotación en el plano, los números duales unitarios describen una traslación. Además, un vector de tres números duales permite establecer la ubicación de una recta en el espacio; si se define un vector que sólo se puede mover a lo largo de esa recta, éste también puede ser parametrizado por un vector dual.

Por otro lado, se sabe que para describir la postura (posición y orientación) de un cuerpo en el espacio, se requieren seis coordenadas, tres para la posición y tres para la orientación. Para la posición generalmente se usa un vector de coordenadas cartesianas; sin embargo, no existe una forma única de representar la orientación y esto es debido a que el espacio de configuración de la orientación no es un espacio vectorial sino una variedad (manifold) diferenciable.

Entre las parametrizaciones de la orientación más comunes estan los ángulos de Euler, las matrices de rotación y los cuaterniones unitarios. En este trabajo se explica cómo usar los números duales para describir la postura de cuerpos rígidos. Una ventaja es que al usar números duales se pueden agrupar en un sólo término las expresiones de la posición y orientación, obeteniéndose expresiones más compactas.

Hay que señalar que aunque la mayor parte de la información que se presenta en este documento ha sido tomada de diversas fuentes (Van de Ha, J. y M. D. Shuster, 2009), (Campa y de la Torre, 2010), (Chaturvedi, N. et al., 2011), el objetivo principal de este trabajo es clarificar algunos conceptos básicos sobre números duales y otras parametrizaciones de la orientación. La intención es seguir trabajando en el modelado y control de sistemas mecánicos usando números duales.

En la sección II se presentan los fundamentos matemáticos necesarios para trabajar con números duales. En la sección III, se aborda el problema de la cinemática de un cuerpo rígido de la forma tradicional, mientras que en la sección IV se presentan las parametrizaciones basadas en números duales. Finalmente, en la sección V, se exponen las conclusiones del estudio realizado.

II. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

II-A. Cuaterniones

Un cuaternión es básicamente un número compuesto por cuatro números reales: $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ que tiene la forma general:

$$a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{H} \tag{1}$$

donde $1, i, j$ y k son los elementos base del espacio de los cuaterniones (denotado como $\mathbb{H}$ en honor a Hamilton) que deben satisfacer los productos básicos definidos en la tabla 1, donde $\otimes$ se usa para representar la multiplicación de dos cuaterniones.

TABLA I
PRODUCTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA DE CUATERNIONES.

$\otimes$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

La tabla 1 define el álgebra de cuaterniones, que es asociativa pero no conmutativa. Un cuaternión de la forma (1) se puede expresar también como un vector:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}^T \in \mathbb{H},$$

o como un arreglo de un escalar y un vector:

$$\begin{bmatrix} a & \boldsymbol{v}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{H},$$

donde a es la parte real (escalar) y $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} b & c & d \end{bmatrix}^T$ es la parte imaginaria (o vectorial) del cuaternión.

Si $\begin{bmatrix} a_1 & \boldsymbol{v}_1^T \end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix} a_2 & \boldsymbol{v}_2^T \end{bmatrix}^T$ son dos cuaterniones entonces:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_1 \\ \boldsymbol{v}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{H} \\ \begin{bmatrix} a_1 \\ \boldsymbol{v}_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_2 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 a_2 - \boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_2 \\ a_1 \boldsymbol{v}_2 + a_2 \boldsymbol{v}_1 + S(\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{H} \end{aligned} \tag{2}$$

donde el operador matricial $S(\cdot) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathrm{so}(3)$ es tal que si $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ entonces:

$$S(\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{so}(3)$$

siendo $\mathrm{so}(3)$ el espacio de matrices antisimétricas de 3×3.

El conjugado y la norma de un cuaternión $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} a & \boldsymbol{v}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{H}$ se definen, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}^* &= \begin{bmatrix} a & -\boldsymbol{v}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{H} \\ \|\boldsymbol{q}\| &= \sqrt{\boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{q}^*} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ya que el producto $\boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{q}^*$ siempre da un número real (un cuaternión con parte imaginaria cero) positivo.

Los cuateriones unitarios son el subconjunto de cuaterniones que tienen norma igual a 1, es decir, son los elementos de la hiperesfera unitaria S^3. La importancia de los cuaterniones unitarios se debe a que forman un grupo de Lie de dimensión 3, de modo que si $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2 \in \mathrm{S}^3$ entonces $\boldsymbol{q}_1 \otimes \boldsymbol{q}_2 \in \mathrm{S}^3$ y existe una inversa $\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}^* \in \mathrm{S}^3$ tal que $\boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{q}^{-1} = 1$.

II-B. Números duales

El conjunto de números complejos ($\mathbb{C}$) se define como:

$$\mathbb{C} = \{\boldsymbol{z} = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

De manera similar, el conjunto de los números duales (denotado aquí por $\mathbb{D}$) se define de la siguiente forma:

$$\mathbb{D} = \{\bar{\boldsymbol{z}} = x + \varepsilon y : x, y \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\},$$

donde x es la parte primaria (o real) y y la parte secundaria (o dual) del número dual. El símbolo ε representa una unidad algebraica tal que $\varepsilon^2 = 0$, pero $\varepsilon \neq 0$, y aunque a primera vista esto pudiera parecer inadmisible, en la práctica ε se puede considerar como una cantidad muy pequeña (un infinitesimal) que al ser elevado al cuadrado resulta aún más pequeña, de modo que resulta despreciable. Nótese que tanto $\mathbb{C}$ como $\mathbb{D}$ son espacios isomórficos a $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^2$.

Un número dual $\bar{\boldsymbol{z}} = x + \varepsilon y \in \mathbb{D}$ se puede representar también como un vector $\bar{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \in \mathbb{D}$. Dados dos números duales: $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{D}$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 y_2 + y_1 x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{D} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 y_2 + y_1 x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{D} \end{aligned}$$

Además, si $\bar{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \in \mathbb{D}$ entonces su conjugado es $\bar{\boldsymbol{z}}^* = \begin{bmatrix} x & -y \end{bmatrix}^T \in \mathbb{D}$ y por definición:

$$\|\bar{\boldsymbol{z}}\| = \sqrt{\bar{\boldsymbol{z}} \times \bar{\boldsymbol{z}}^*} = |x|$$

Un número dual unitario (con norma igual a 1) es por lo tanto uno con parte primaria igual a 1. Así que el conjunto de números duales unitarios equivale a la línea $x = 1$ en el plano dual.

II-B.1. Funciones duales: Una función dual de un número dual es un mapeo de $\mathbb{D}$ a $\mathbb{D}$. Toda función dual $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ puede ser desarrollada en series de Taylor, obteniéndose la fórmula (Brodsky y Shoam , 1993):

$$f(x + \varepsilon y) = f(x) + \varepsilon y f'(x), \tag{3}$$

donde $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$; por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \cos(x + \varepsilon y) &= \cos(x) - \varepsilon y \mathrm{sen}(x) && (4) \\ \mathrm{sen}(x + \varepsilon y) &= \mathrm{sen}(x) + \varepsilon y \cos(x) && (5) \\ e^{x + \varepsilon y} &= (1 + \varepsilon y) e^x && (6) \end{aligned}$$

II-B.2. Vectores duales: Un vector dual se puede ver como un arreglo de números duales. Así, si $\bar{\boldsymbol{z}}_1, \bar{\boldsymbol{z}}_2, \bar{\boldsymbol{z}}_3 \in \mathbb{D}$ entonces se puede definir:

$$\bar{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{z}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{z}}_2 \\ \bar{\boldsymbol{z}}_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{D}^3,$$

o bien, descomponinedo en sus partes primaria y secundaria:

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{y} \in \mathbb{D}^3 \equiv \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

En general, un vector de n números duales pertenece a $\mathbb{D}^n$, el cual es isomórfico a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{2n}$.

II-C. *Cuaterniones duales*

Un cuaternión dual es un vector de cuatro números duales, aunque también puede ser visto como la composición de dos cuaterniones, uno representando la parte primaria y el otro la parte secundaria del cuaternión dual, es decir si $\bar{\boldsymbol{q}}$ es un cuaternión dual,

$$\bar{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} a_1 + \varepsilon a_2 \\ b_1 + \varepsilon b_2 \\ c_1 + \varepsilon c_2 \\ d_1 + \varepsilon d_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{D}^4 \equiv \mathbb{H} \times \mathbb{H} \equiv \mathbb{H}^2 \equiv \mathbb{R}^8$$

y usando la notación escalar-vector de los cuaterniones:

$$\bar{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \boldsymbol{v}_1 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} a_2 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^2,$$

donde $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \end{bmatrix}^T$ y $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}^T$.

Dados dos cuaterniones duales $\bar{\boldsymbol{q}}_1 = \boldsymbol{r}_1 + \epsilon \boldsymbol{d}_1$, $\bar{\boldsymbol{q}}_2 = \boldsymbol{r}_2 + \epsilon \boldsymbol{d}_2 \in \mathbb{H}^2$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{q}}_1 + \bar{\boldsymbol{q}}_2 &= \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \epsilon(\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2) \\ \bar{\boldsymbol{q}}_1 \odot \bar{\boldsymbol{q}}_2 &= \boldsymbol{r}_1 \otimes \boldsymbol{r}_2 + \epsilon(\boldsymbol{r}_1 \otimes \boldsymbol{d}_2 + \boldsymbol{d}_1 \otimes \boldsymbol{r}_2) \end{aligned}$$

donde el símbolo $\odot$ denota la multiplicación de dos cuaterniones duales, mientras que $\otimes$ es la multiplicación de cuaterniones ordinarios definida en (2).

El conjugado del cuaternión dual $\bar{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{r} + \epsilon \boldsymbol{d} \in \mathbb{H}^2$ es $\bar{\boldsymbol{q}}^* = \boldsymbol{r}^* + \epsilon \boldsymbol{d}^* \in \mathbb{H}^2$, mientras que sus norma se define como:

$$\|\bar{\boldsymbol{q}}\| = \sqrt{\bar{\boldsymbol{q}} \odot \bar{\boldsymbol{q}}^*},$$

pero para que la norma sea real es necesario que $\bar{\boldsymbol{q}} \odot \bar{\boldsymbol{q}}^*$ lo sea también, lo cual se cumple si:

$$\boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{d}^* + \boldsymbol{d} \otimes \boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{0}. \tag{7}$$

Un cuaternión dual unitario es entonces aquel que satisface (7) y además:

$$\boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{r}^* = 1 \tag{8}$$

III. CINEMÁTICA

La cinemática es la rama de la mecánica clásica que estudia las leyes de movimiento. En el caso de un cuerpo rígido, el movimiento queda descrito por la posición y orientación en el espacio, lo que en conjunto se conoce como la postura. Se requieren seis grados de libertad para definir la postura de un cuerpo en el espacio, siendo tres para la posición y tres para la orientación.

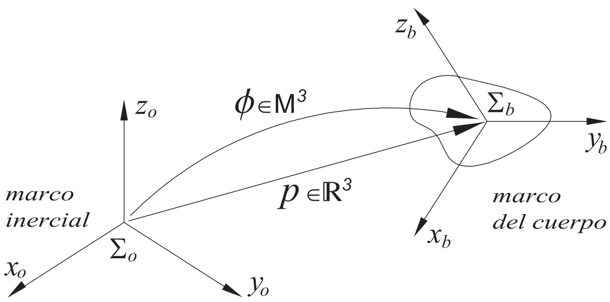

Figura 1. Posición y orientación de un cuerpo rígido

Considérese un cuerpo rígido que se mueve libremente en el espacio (figura 1), el cuerpo tiene un marco coordenado $\Sigma_b(x_b, y_b, z_b)$ que se mueve junto con él y además existe un marco de referencia fijo (inercial) $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$. Para definir la posición del cuerpo rígido con respecto al marco inercial, se usa un vector de posición $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$; sin embargo, para la orientación no existe una única forma de definirla, debido principalmente a que el espacio de configuración de la orientación no forma un espacio vectorial, sino una variedad diferenciable de dimensión tres. Si M^3 es esa variedad, entonces $\boldsymbol{\phi} \in \mathrm{M}^3 \subseteq \mathbb{R}^n$ es el vector de n parámetros pertenecientes a M^3.

Las parametrizaciones de la orientación más comunes son:

- Ángulos de Euler: $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^3$. Se trata de tres ángulos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ que indican rotaciones sucesivas alrededor de los ejes coordenados del marco Σ_b, necesarios para hacer que Σ_0 coincida con Σ_b. Existen doce posibles sucesiones de rotaciones (también llamadas convenciones) de ángulos de Euler (e.g. XYZ, XYX, YXZ). Si se especifica la convención, entonces la orientación queda definida por:

  $$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

  por lo que se trata de una parametrización mínima; sin embargo, es bien conocido que cada parametrización mínima de una variedad tiene puntos singulares, en los que no están definidos de forma única esos parámetros. Esta es una desventaja de los ángulos de Euler para describir la orientación.

- Matrices de rotación: $\boldsymbol{\phi} \in \mathrm{SO}(3) \subset \mathbb{R}^{3\times3}$. Es el método más extendido en la actualidad debido a la simplicidad del álgebra de matrices. Las matrices de rotación forman un grupo de Lie que se conoce como grupo ortogonal de dimensión tres y se define como:

  $$\mathrm{SO}(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3\times3} : R^T R = I, \det(R) = 1\} \tag{9}$$

  Los nueve elementos de R representan los cosenos directores de los ángulos formados por los correspondientes ejes coordenados. Si se hace uso de la notación propuesta en (Bach y Paielli, 1993), las tres columnas de la matriz de rotación se apilan formando un vector columna:

$$\boldsymbol{\phi}(R) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{r}_3 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}^3 \subset \mathbb{R}^9 \tag{10}$$

el cual es más adecuado para aplicaciones de control.

- Parámetros de Euler: $\boldsymbol{\phi} \in \mathrm{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$. Los parámetros de Euler (también llamados parámetros de Euler-Rodrígues) son cuaterniones $\begin{bmatrix} a & \boldsymbol{v}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{H}$ que satisfacen la siguiente restricción:

$$a^2 + \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v} = 1,$$

por lo que son cuaterniones unitarios. Los parámetros de Euler satisfacen las siguientes relaciones:

$$a = \cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big) \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{v} = \mathrm{sen}\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\boldsymbol{u}, \tag{11}$$

donde $\boldsymbol{u} \in \mathrm{S}$ es un vector unitario en la dirección en la cual debe girar el marco Σ_0 un ángulo θ para que coincida con Σ_b, realizando una sola rotación.
Al no ser una parametrización mínima, los parámetros de Euler no tienen el problema de singularidades, pero $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} a & \boldsymbol{v}^T \end{bmatrix}^T$ y $\boldsymbol{q} = -\begin{bmatrix} a & \boldsymbol{v}^T \end{bmatrix}^T$ representan la misma rotación.

Por otra parte, los vectores de velocidad lineal $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ y velocidad angular $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ de un cuerpo rígido con respecto al marco inercial, se pueden obtener a partir de $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{\phi}$ y sus derivadas con respecto al tiempo: $\dot{\boldsymbol{p}}$ y $\dot{\boldsymbol{\phi}}$. La velocidad lineal es simplemente:

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{p}}$$

mientras que la velocidad angular se calcula dependiendo de la parametrización usada para decribir la orientación.

- A partir de los ángulos de Euler. Existe una expresión diferente para cada una de las doce convenciones de ángulos de Euler, pero en general, es necesario encontrar los ejes unitarios $\boldsymbol{w}_\alpha, \boldsymbol{w}_\beta, \boldsymbol{w}_\gamma \in \mathrm{S}^2$ alrededor de los cuales se realiza cada rotación, de magnitud igual a la derivada temporal del ángulo de Euler correspondiente, es decir:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha}\boldsymbol{w}_\alpha + \dot{\beta}\boldsymbol{w}_\beta + \dot{\gamma}\boldsymbol{w}_\gamma = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_\alpha & \boldsymbol{w}_\beta & \boldsymbol{w}_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

- A partir de una matriz de rotación: La relación entre la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la derivada de una matriz de rotación es:

$$\dot{R} = S(\boldsymbol{\omega})R. \tag{12}$$

Si $R = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3 \end{bmatrix} \in \mathrm{SO}(3)$ es una matriz de rotación, entonces se comprueba que (Campa, R. y H. de la Torre, 2010):

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} S(\boldsymbol{r}_1) & S(\boldsymbol{r}_2) & S(\boldsymbol{r}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{r}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{r}}_2 \\ \dot{\boldsymbol{r}}_3 \end{bmatrix}$$

- A partir de los parámetros de Euler. Si la orientación queda descrita por $\begin{bmatrix} a & \boldsymbol{v}^T \end{bmatrix}^T \in S^3$, entonces:

$$\boldsymbol{\omega} = 2\begin{bmatrix} -\boldsymbol{v} & aI + S(\boldsymbol{v}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{\boldsymbol{v}} \end{bmatrix}$$

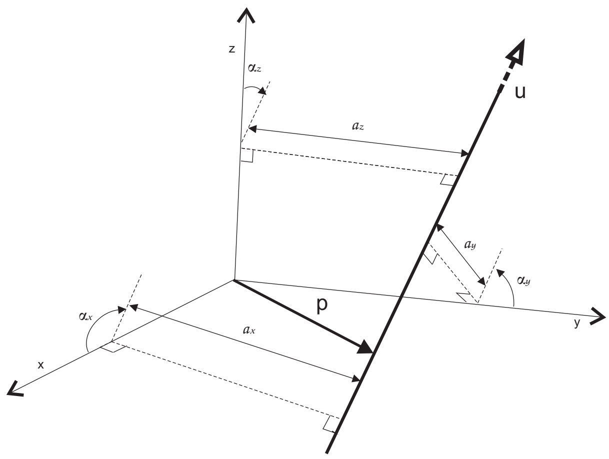

Figura 2. Ángulos duales de una recta en el espacio.

IV. CINEMÁTICA CON NÚMEROS DUALES

Para localizar una recta en el espacio se necesitan cuatro coordenadas independientes. Existen diferentes parametrizaciones de la postura de una recta, una de ellas fue propuesta por Plücker (Rooney, 2007) y consiste en especificar dos vectores: un vector unitario $\boldsymbol{u}$ en la dirección de la recta y un vector de posición $\boldsymbol{p}$ del origen del marco de referencia a un punto P de la recta. En la figura 2 se muestra una recta y los dos vectores que la caracterizan.

Las coordenadas de Plücker están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ S(\boldsymbol{p})\boldsymbol{u} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

y se encuentran sujetas a las siguientes restricciones:

$$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u} = 1 \quad , \qquad \boldsymbol{u}^T S(\boldsymbol{p})\boldsymbol{u} = 0.$$

En (Rooney, 2007) se explica cómo las coordenadas de Plücker se pueden expresar con un vector de tres números duales $\boldsymbol{u} + \varepsilon S(\boldsymbol{p})\boldsymbol{u} \in \mathbb{D}^3$. Ahora bien, dado que $\boldsymbol{u}$ es un vector unitario, sus componentes son los cosenos de los ángulos directores α_x, α_y y α_z mostrados en la figura 2, es decir:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_x) \\ \cos(\alpha_y) \\ \cos(\alpha_z) \end{bmatrix} \tag{13}$$

y por lo tanto:

$$S(\boldsymbol{p})\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} p_y\cos(\alpha_z) - p_z\cos(\alpha_y) \\ p_z\cos(\alpha_x) - p_x\cos(\alpha_z) \\ p_x\cos(\alpha_y) - p_y\cos(\alpha_x) \end{bmatrix} \tag{14}$$

donde p_x, p_y y p_z son las componentes de $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$. En la figura 2 se muestran los segmentos a_x, a_y y a_z que indican la distancia mínima entre la recta y los ejes X,Y y Z, respectivamente. Empleando fórmulas de análisis vectorial para encontrar la distancia entre dos rectas en el espacio (Larson, 1999), es posible demostrar que (14) se puede escribir como:

$$S(\boldsymbol{p})\boldsymbol{u} = -\begin{bmatrix} a_x\mathrm{sen}(\alpha_x) \\ a_y\mathrm{sen}(\alpha_x) \\ a_z\mathrm{sen}(\alpha_x) \end{bmatrix}$$

Si se define $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_x\ \alpha_y\ \alpha_z]^T \in \mathrm{S}^2$, $\boldsymbol{a} = [a_x\ a_y\ a_z]^T \in \mathbb{R}^3$ y la función coseno de un vector $\boldsymbol{v} = [v_x\ v_y\ v_z]^T$ como $\cos(\boldsymbol{v}) = [\cos(v_x)\ \cos(v_y)\ \cos(v_z)]^T$, entonces se comprueba que

$$\boldsymbol{u} + \varepsilon S(\boldsymbol{p})\boldsymbol{u} = [I + \varepsilon S(\boldsymbol{p})]\,\boldsymbol{u} = \cos(\boldsymbol{\alpha} + \varepsilon\boldsymbol{a}) \tag{15}$$

El término $\boldsymbol{\alpha}+\varepsilon\boldsymbol{a}$ se conoce como vector de ángulos directores duales. Nótese que la parte primaria de $\cos(\boldsymbol{\alpha}+\varepsilon\boldsymbol{a})$ es el vector de cosenos directores de $\boldsymbol{u}$ y por lo tanto definen la dirección de la recta; la parte secundaria determina el desplazamiento de la recta con respecto al origen (si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ entonces la recta pasa por el origen).

El llamado principio de transferencia (Rico y Duffy, 1993) establece que todas las leyes y fórmulas que aplican a un sistema de vectores unitarios que pasan por el origen, son igualmente válidas para un sistema de vectores unitarios fuera del origen, si cada variable real en las fórmulas se reemplaza por una variable dual.

El principio de transferencia es así empleado para obtener otras parametrizaciones de la postura de un cuerpo rígido que permiten combinar la posición y la orientación a través de números duales.

IV-A. Matriz de transformación dual

Considérese nuevamente la figura 1 y supóngase que se usa una matriz de rotación para describir la orientación. Como se ha dicho, cada columna de la matriz de rotación corresponde al vector formado por los cosenos directores de cada uno de los ejes del marco Σ_b, con respecto a marco Σ_0. Es decir, si $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^3$ son los vectores de ángulos directores (reales) de los ejes X_b, Y_b y Z_b, entonces la matriz de rotación R, que da la orientación del marco Σ_b con respecto al marco Σ_0 es:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\boldsymbol{\lambda}) & \cos(\boldsymbol{\mu}) & \cos(\boldsymbol{\nu}) \end{bmatrix} \in \mathrm{SO}(3)$$

De acuerdo al principio de transferencia, la matriz de transformación (ya que no sería correcto llamarle sólo matriz de rotación) dual, que daría tanto la posición como la orientación del marco Σ_b respecto a Σ_0 sería:

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} \cos(\boldsymbol{\lambda} + \varepsilon\boldsymbol{l}) & \cos(\boldsymbol{\mu} + \varepsilon\boldsymbol{m}) & \cos(\boldsymbol{\nu} + \varepsilon\boldsymbol{n}) \end{bmatrix},$$

donde $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ son vectores que van del origen del marco Σ_0 a los ejes X_b, Y_b y Z_b, respectivamente. Ahora bien, empleando la expresión (15), es posible reacomodar la ecuación anterior quedando:

$$\bar{R} = [I + \varepsilon S(\boldsymbol{p})] \begin{bmatrix} \cos(\boldsymbol{\lambda}) & \cos(\boldsymbol{\mu}) & \cos(\boldsymbol{\nu}) \end{bmatrix},$$

donde $\boldsymbol{p}$ es el vector de posición que va del origen del marco Σ_0, al origen del marco Σ_b; por lo tanto:

$$\bar{R} = [I + \varepsilon S(\boldsymbol{p})]R. \tag{16}$$

Ahora bien, tomando la derivada de (16) se puede comprobar que

$$\dot{\bar{R}} = S(\boldsymbol{\omega} + \varepsilon(\dot{\boldsymbol{p}} + S(\boldsymbol{p})\boldsymbol{\omega}))\bar{R} \tag{17}$$

Reescribiendo la ecuación anterior haciendo uso nuevamente de la representación propuesta por Bach y Paielli para las matrices de rotación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\boldsymbol{r}}}_1 \\ \dot{\bar{\boldsymbol{r}}}_2 \\ \dot{\bar{\boldsymbol{r}}}_3 \end{bmatrix} = S(\boldsymbol{\omega} + \varepsilon(\dot{\boldsymbol{p}} + S(\boldsymbol{p})\boldsymbol{\omega})) \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{r}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{r}}_2 \\ \bar{\boldsymbol{r}}_3 \end{bmatrix}$$

Utilizando la propiedad de las matrices antisimétricas: $S(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = -S(\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}$, la ecuación anterior queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\boldsymbol{r}}}_1 \\ \dot{\bar{\boldsymbol{r}}}_2 \\ \dot{\bar{\boldsymbol{r}}}_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} S(\bar{\boldsymbol{r}}_1) \\ S(\bar{\boldsymbol{r}}_2) \\ S(\bar{\boldsymbol{r}}_3) \end{bmatrix} [\boldsymbol{\omega} + \varepsilon(\dot{\boldsymbol{p}} + S(\boldsymbol{p})\boldsymbol{\omega})] \tag{18}$$

Y observando que

$$\begin{bmatrix} S(\bar{\boldsymbol{r}}_1) & S(\bar{\boldsymbol{r}}_2) & S(\bar{\boldsymbol{r}}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(\bar{\boldsymbol{r}}_1) \\ S(\bar{\boldsymbol{r}}_2) \\ S(\bar{\boldsymbol{r}}_3) \end{bmatrix} = -2I \in \Re^{3\times3} \tag{19}$$

es posible despejar $\boldsymbol{\omega} + \varepsilon\dot{\boldsymbol{p}}$:

$$\boldsymbol{\omega}+\varepsilon\dot{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{2}[I - \epsilon S(\boldsymbol{p})] \begin{bmatrix} S(\bar{\boldsymbol{r}}_1) & S(\bar{\boldsymbol{r}}_2) & S(\bar{\boldsymbol{r}}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\boldsymbol{r}}}_1 \\ \dot{\bar{\boldsymbol{r}}}_2 \\ \dot{\bar{\boldsymbol{r}}}_3 \end{bmatrix} \tag{20}$$

La expresión (20) permite obtener en un sólo paso la velocidad lineal $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{p}}$ y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo rígido a partir de los elementos de la matriz de transformación dual.

IV-B. Cuaterniones duales unitarios

En analogía con los parámetros de Euler, los cuaterniones duales unitarios son representados de la siguiente forma:

$$\bar{a} = \cos\left(\frac{\bar{\theta}}{2}\right) \qquad \bar{\boldsymbol{v}} = \mathrm{sen}\left(\frac{\bar{\theta}}{2}\right)\bar{\boldsymbol{u}}, \tag{21}$$

donde $\bar{\boldsymbol{u}}$ es un vector unitario desplazado del origen (es decir, un vector dual unitario) y $\bar{\theta} = \theta + \epsilon d$: siendo θ el ángulo girado alrededor de $\bar{\boldsymbol{u}}$ y $\boldsymbol{d}$ la distancia recorrida en la dirección del mismo eje. Otra forma de representar un cuaternión dual es la siguiente:

$$\bar{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q} + \varepsilon \frac{1}{2} \boldsymbol{q}_p \otimes \boldsymbol{q}$$

, donde $\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{q}_p = (0, \boldsymbol{p}) \in \mathbb{R}^4$.
Por otro lado, debido a que un cuerpo en movimiento general requiere de seis coordenadas generalizadas para ser definido, efectivamente un cuaternión dual unitario no es una representación mínima, pero sí es la más compacta y eficiente representación que hasta el momento se ha empleado.

En (Han et al., 2008) se puede encontrar la siguiente relación:

$$\boldsymbol{\omega} + \varepsilon(\dot{\boldsymbol{p}} + S(\boldsymbol{p})\boldsymbol{\omega}) = 2\dot{\hat{\boldsymbol{q}}} \odot \hat{\boldsymbol{q}}^* \tag{22}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior $\boldsymbol{q} = [\bar{a} \;\; \bar{\boldsymbol{v}}^T]^T$ y despejando $\boldsymbol{\omega} + \varepsilon\dot{\boldsymbol{p}}$:

$$\boldsymbol{\omega} + \epsilon\dot{\boldsymbol{p}} = 2[I - \epsilon S(\boldsymbol{p})][(\bar{a}I + S(\bar{\boldsymbol{v}}))\dot{\bar{\boldsymbol{v}}} - \dot{\bar{a}}\bar{\boldsymbol{v}}] \tag{23}$$

De manera similar a (20), la expresión (23) permite obtener $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{\omega}$ a partir del cuaternión dual unitario dado por: $\bar{\boldsymbol{q}} = \left[\begin{array}{cc} \bar{a} & \bar{\boldsymbol{v}} \end{array}\right]^T$

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se han resumido algunas expresiones que son útiles para la formulación de la cinemática de un cuerpo rígido empleando números duales. Estas expresiones son muy similares a las tradicionalmente empleadas con números reales, pero ahora se incluye también la parte de posición y no sólo la orientación.

REFERENCIAS

Bach, R. y R. Paielli (1993). Linearization of attitude control error dynamics. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 38, No. 10, pp. 1521-1525.

Brodsky, V. y M. Shoam (1993). Dual numbers representation of rigid body dynamics. Journal of Mechanism and Machine Theory. Vol. 34, No. 5, pp. 693-718.

Campa, R. y H. de la Torre (2010). On the representations of orientation for pose control tasks in robotics. Memorias del VIII Congreso Mexicano de Robótica, México, D.F., octubre 2010.

Chaturvedi, N., Amit K. Sanyal, and N. Harris McClamroch (2011). Rigid Body Attitude Control: Using rotation matrices for continuous, singularity-free control laws. IEEE Control Systems Magazine, Vol. 31, No. 3.

Hamilton, W. R. (1943). On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions Proceeding of the Royal Irish Academy, Vol. 2, pp. 424-434.

Han, Da-Peng, Qing Wei y Ze-Xiang Li(2008). Kinematic control of free rigid bodies using dual quaternions.International Journal of Automation and Computing, Vol. 126, No.3, pp. 425-435.

Larson, R., R. Hostetler y B. Edwards (2008). Cálculo y Geometría Analítica.Vol. 2, Ed McGraw Hill.

Rico, D.M. y J. Duffy (1993). The principle of transference: History, statement and proof. Mechanism and Machine Theory, Vol. 28, No. 1, pp. 165-177.

Rooney, J. (2007). William Kingdon Clifford (1845-1879). Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science: Their Contributions and Legacies. History of Mechanism and Machine Science. M. Ceccarelli (ed.). Springer.

Van de Ha, J. y M. D. Shuster (2009). A Tutorial on Vectors and Attitude. IEEE Control System Magazine, Vol. 29, No. 2, pp 94-107.